

Reg. No. :

Code No. : 30341 B Sub. Code : JMMA 62/
JMMC 62

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
APRIL 2020.

Sixth Semester

Mathematics/Mathematics with CA – Main

COMPLEX ANALYSIS

(For those who joined in July 2016 only)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $z = 0$ -ல் $f(z) = |z|^2$ என்ற சார்பு ஒரு _____
ஆகும்.
(அ) பகுமுறைச் சார்பு
(ஆ) வகையிடத்தக்கது
(இ) வகையிடத்தக்கதல்ல
(ஈ) தொடர்ச்சியற்றது

At $z = 0$, the function $f(z) = |z|^2$ is _____.

- (a) analytic
- (b) differentiable
- (c) not differentiable
- (d) not continuous

2. C.R சமன்பாட்டின் முழுமையான படிவம் _____.

(அ) $f_x = if_y$ (ஆ) $f_x = i \frac{\partial f}{\partial x}$

(இ) $f_x = -if_y$ (ஈ) $f_x = i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Complete form of C.R equations is

(a) $f_x = if_y$ (b) $f_x = i \frac{\partial f}{\partial x}$

(c) $f_x = -if_y$ (d) $f_x = i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

3. 'a' என்ற மையப்புள்ளியில் 'r' -ஐ ஆரமாகக் கொண்டது

C எனில் $\int_C \frac{dz}{z-a}$ -ன் மதிப்பு _____.

(அ) $2\pi i$ (ஆ) $-2\pi i$

(இ) 0 (ஈ) $2\pi r$

If C is a circle with centre ' a ' and radius ' r ', then

the value of $\int_C \frac{dz}{z-a} = \text{_____}$.

- (a) $2\pi i$ (b) $-2\pi i$
(c) 0 (d) $2\pi r$

4. C என்பது $|z| = r$ என்ற வட்டம் எனில் $\int_C \frac{dz}{z}$ -ன் மதிப்பு
_____.

- (அ) πi (ஆ) $2\pi i$
(இ) 2π (ஈ) π

If C is a circle $|z| = r$, then the value of $\int_C \frac{dz}{z}$ is
_____.

- (a) πi (b) $2\pi i$
(c) 2π (d) π

5. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \text{_____}$.

- (அ) 0 (ஆ) 1
(இ) ∞ (ஈ) -1

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \text{_____}$.

- (a) 0 (b) 1
(c) ∞ (d) -1

6. $\frac{1}{z(z-i)}$ என்பதன் ஒருமையப் புள்ளிகள் _____.

- (அ) 0 மற்றும் 1 (ஆ) 0 மற்றும் i
 (இ) 1 மற்றும் 2 (ஈ) 2 மற்றும் 0

The singularities of $\frac{1}{z(z-i)}$ are _____.

- (a) 0 and 1 (b) 0 and i
 (c) 1 and 2 (d) 2 and 0

7. $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ -ஐ மதிப்பீடு செய்யும் போது,
 $z = \text{_____}$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

- (அ) $z = e^{-i\theta}$ (ஆ) $z = e^{i\theta}$
 (இ) $z = 2e^{i\theta}$ (ஈ) $z = 2e^{-i\theta}$

To evaluate $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, which we substitute for z is _____.

- (a) $z = e^{-i\theta}$ (b) $z = e^{i\theta}$
 (c) $z = 2e^{i\theta}$ (d) $z = 2e^{-i\theta}$

8. $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 2z + 2)^2}$ எனில், வரிசை 1 உடைய

புஜ்யங்கள் _____ ஆகும்.

(அ) i மற்றும் $-i$

(ஆ) $1 - i$ மற்றும் $1 + i$

(இ) $-1 + i$ மற்றும் $-1 - i$

(ஈ) இவை ஏதுமில்லை

Let $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 2z + 2)^2}$. Then _____ and

_____ are zeros of order 1.

(a) i and $-i$

(b) $1 - i$ and $1 + i$

(c) $-1 + i$ and $-1 - i$

(d) none of these

9. $w = z + b$ -ன் நிலைப்புள்ளிகள் $Z =$ _____.

(அ) 0 (ஆ) ∞

(இ) 0 மற்றும் ∞ (ஈ) 1

The fixed points of $w = z + b$ is $Z =$ _____.

(a) 0 (b) ∞

(c) 0 and ∞ (d) 1

10. $w = iz$ என்பது ஒரு சுழற்சியைக் குறிக்க வேண்டுமானால்,
_____ சுழற்ற வேண்டும்.

(அ) $\frac{\pi}{2}$ (ஆ) π

(இ) $\frac{3\pi}{2}$ (ஈ) 2π

$w = iz$ represents a rotation through an angle
_____.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π

(c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) 2π

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

Each answer should not exceed 250 pages.

11. (அ) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$ என்ற சார்புக்கு C.R
சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்கவும்.

Verify C.R equations for the function
 $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$.

Or

- (ஆ) u மற்றும் v என்பன இணை இசைச் சார்புகள் எனில், இவற்றின் பெருக்கல் uv -யும் ஓர் இசைசார்பு என நிரூபி.

Show that if u and v are conjugate harmonic functions, uv is a harmonic function.

12. (அ) $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ என நிரூபி.

Prove that $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt .$

Or

(ஆ) $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$ என நிரூபி.

Prove that $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz .$

13. (அ) $|z| < 1$ -ல், $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ குறித்து காட்டுவதற்கான
டெய்லரின் தொடரைக் காண்க.

Obtain the Taylor's series to represent
 $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ in $|z| < 1$.

Or

(ஆ) லாரண்ட்-ன் தொடரைப் பயன்படுத்தி, $z = 1$ -ல்,
 $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ -ன் எச்சத்தைக் கண்டுபிடி.

Use Laurent's series, find residue of $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$
at $z = 1$.

14. (அ) Contour தொகையைப் பயன்படுத்தி

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

Using Contour integration, find the value of

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}.$

Or

(ஆ) மதிப்பீடு செய்க : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin\theta}.$

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin\theta}.$

15. (அ) $w = \frac{1}{2}$ என்ற சார்புவின் கீழ் $|z - 3i| = 3$ என்ற

வட்டத்தின் பிம்பத்தைக் கண்டுபிடி.

Find the image of the circle $|z - 3i| = 3$

under the map $w = \frac{1}{2}.$

Or

(ஆ) $w = \frac{5-4z}{4z-2}$ என்ற உருமாற்றம், $|z|=1$ என்ற

வட்டத்தை 1 என்ற அளவை ஆரமாகவும், $\frac{-1}{2}$ -ஐ

மையமாகவும் கொண்ட வட்டத்திற்கு மாற்றும் என
நிரூபி.

Show that the transformation $w = \frac{5-4z}{4z-2}$

maps the unit circle $|z|=1$ into a circle of

radius unity and centre $\frac{-1}{2}$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) C.R சமன்பாடுகளை துருவ ஆயங்களில் தருவி.

Derive C.R equations in polar coordinates.

Or

(ஆ) $u(x,y) = ax^2 - y^2 + xy$ ஒரு இசைச் சார்பு எனில்,
மாறிலி a -ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் u என்பது
மெய்ப்பகுதி எனில், பகுமுறைசார்பு $f(z)$ ஐக்
காண்க.

If $u(x,y) = ax^2 - y^2 + xy$ is harmonic, find
the value of ' a '. Find an analytic function
 $f(z)$ for which u is the real part.

17. (அ) கோஷி-குர்சாத்தின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

State and prove Cauchy-Goursat theorem.

Or

(ஆ) மதிப்பிடுக :

(i) $\int_C \frac{\sin z dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$, C என்பது $|z| = 2$ என்ற ஒரு வட்டம்

(ii) $\int_C \frac{z^3 dz}{(2z + i)^3}$ C என்பது ஒரு ஓரலகு வட்டம்.

Evaluate :

(i) $\int_C \frac{\sin z dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$, where C is the circle $|z| = 2$.

(ii) $\int_C \frac{z^3 dz}{(2z + i)^3}$ where C is the unit circle.

18. (அ) லாரண்டின் தொடரைக் கூறி நிரூபி.

State and prove Laurent's series.

Or

(ஆ) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ என்ற சார்பை

- (i) $z = 0$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்தும்
- (ii) $z = 1$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்தும்
டெய்லரின் தொடரில் விரித்து எழுதுக.
மேலும், குவியும் பகுதியை
(1)-க்கும்,
(2)-க்கும், கண்டுபிடி.

Expand $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ as a Taylor's series

- (i) about the point $z = 0$ and
- (ii) about the point $z = 1$. Determine the region of convergence in each case.

19. (அ) மதிப்பிடுக : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Evaluate : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Or

(ஆ) காண்டுர் தொகையைப் பயன்படுத்தி,

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$ -ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

Using the method of Contour integration,

evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

20. (அ) சேர்க்கையின் கீழ், இரட்டை ஒருபடி மாற்றத்தின் கணம் ஒரு குலம் என நிரூபி.

Prove that the set of all bilinear transformations is a group under composition.

Or

- (ஆ) நான்கு புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் இருக்கும் எனில், அவற்றின் குறுக்கு விகிதம் மெய் என நிரூபி.

Prove that the cross ratio of four points is real when the points lie on a circle.
